Examen final de Cálculo

Ejercicio 1. (a) Calcular el límite de la sucesión $\dfrac{\dfrac{n}{1}+\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-2}{3}+\cdots+\dfrac{3}{n-2}+\dfrac{2}{n-1}+\dfrac{1}{n}}{\log(n!)}$

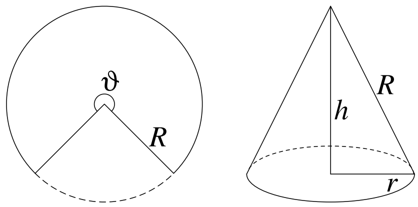
(b) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1-\frac{1}{n}\right)$

Ejercicio 2. Dado un número $\alpha\in]0,\pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1=\operatorname{sen}\alpha$, $x_{n+1}=\operatorname{sen}x_n$.

(a) Justificar que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcular su límite.

(b) Calcular el límite de la sucesión $z_n=\dfrac{1}{x_{n+1}^2}-\dfrac{1}{x_n^2}$

Ejercicio 3. En una lámina circular de radio R se recorta un sector circular de ángulo ϑ y con él se construye un cono. Calcula el valor de ϑ para que el volumen del cono así construido sea máximo.



Ejercicio 4. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje de abscisas la región del plano comprendida entre dicho eje y la curva de ecuación $y=\dfrac{8}{4+x^2}$.

Ejercicio 5. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x^2}$.

(a) Estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $[0,+\infty[$ y en intervalos de la forma $[a,+\infty[$ donde $a>0$.

(b) Comprobar si es cierta o no la igualdad $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$.

Ejercicio 6. (a) Comprobar, mediante una integral doble, que el volumen del tetraedro con vértices en el origen y en los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ (donde a,b,c son números positivos), es igual a $\dfrac{1}{6}abc$.

(b) Calcular el volumen de la región $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x,\ 0\leqslant z\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right\}$.

Ejercicio 7. Encontrar un punto P de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, tal que el plano tangente al elipsoide en P determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

Ejercicio 8. (a) Comprobar que la ecuación $z^2-5xyz+x^3+5x^2y=0$ define a z como función implícita de (x,y) en un entorno de $(1,1)$, con $z(1,1)=2$. Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$.

(b) Resolver la ecuación diferencial $y'+2xy=4x$.

Todos los ejercicios puntúan igual.

Quienes tengan que examinarse solamente del primer parcial deberán hacer los ejercicios 1 a 4.

Quienes tengan que examinarse solamente del segundo parcial deberán hacer los ejercicios 5 a 8.

Quienes tengan que examinarse de toda la asignatura deberán hacer tres ejercicios elegidos entre los cuatro primeros y otros tres ejercicios elegidos entre los cuatro últimos. Para aprobar la asignatura se deberá obtener como mínimo en cada grupo de ejercicios correspondientes a cada parcial una calificación $\geqslant 3$.

Granada, 25 de junio de 2002